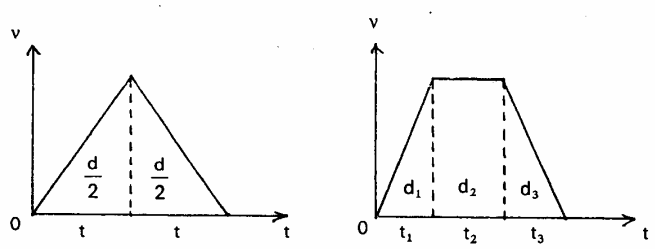
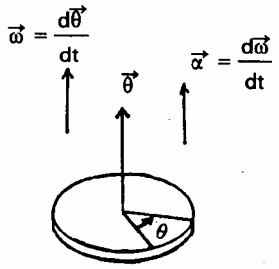
单元 3： 运动学

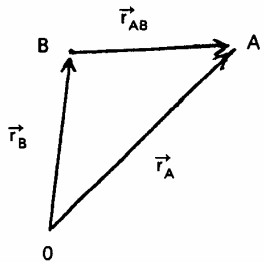
特定目标：

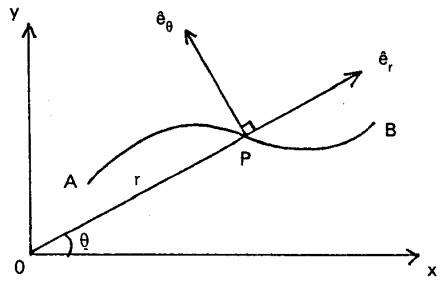
1. 理解位移、速度和加速度及其对应的角位移、角速度和角加速度的意义。
2. 理解合成速度和相对运动。
3. 认识速度和加速度的径向和横向分量。
4. 解有关的实际问题。

内 容	时 间 分 配	教 学 建 议
3.1 位移速度和加速度	2	教师应替学生复习位移、速度和加速度的意义，此外教师应尝试利用向量和微积分的探讨方法。为简单起见，教师可先局限在沿 x 轴的运动并取 x 增加的方向为正向方向。若此，学生应不难导出以下公式 $v=\frac{dx}{dt}=\dot{x}$， $a=\frac{dv}{dt}=\dot{v}=\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x}$ 或 $a=\frac{dv}{dt}=v\frac{dv}{dx}$。 教师应提醒学生当 x、v 和 a 是负数时的物理意义。 对恒加速度的情况，学生应能自行导出以下的公式： $v=u+at$ $x=ut+\frac{1}{2}at^2$ $v^2=u^2+2ax$ 应在此引入质点的二维运动。教师应提醒学生取质点位移、速度和加速度的 x 和 y 轴分量，然后可以在这个方向应用直线运动方法。记质点在一点的位移为 $\vec{r}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$，学生在引导下应能发现 $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}$ 及 $a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2r}{dt^2}=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}$ 从上式亦不难求出速度和加速度的量和方向。

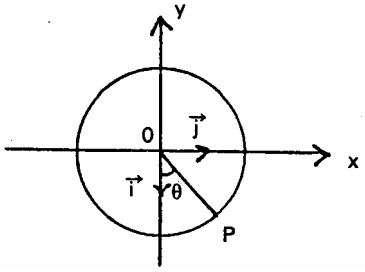
内 容	时 间 分 配	教 学 建 议
		在这阶段，应强调利用直角坐标的参数方程去描述质点的运动路径。学生应懂得应用 1.10 节中学会的知识和技巧去解问题。以下是一些例子。 *例一* 质点 P 由原点 O 出发的速度向量 $\vec{v}$ (ms^{-1}) 是 $80\vec{i}+(50+10t^2)\vec{j}$。相对于原点 O，P 在时间 t 的位置向量及加速度向量可轻易在求 $\vec{v}$ 的积分和导数中获得。 *例二* 两车站的距离是 d。一列火车由一车站出发在时间 t 到达下一车站。若最大的加速度或减速度均是 a 而最大速度不能超过 v，证明 t 的最小可能值是 (a) $t=\frac{d}{v}+\frac{v}{a}$ 若 $d\geq\frac{v^2}{a}$ (b) $t=2\sqrt{\frac{d}{a}}$ 若 $d<\frac{v^2}{a}$ 在此例中，教师可引导学生利用几何作图的方法求解： 

内 容	时间分配	教 学 建 议
3.2 角位移、角速度和角加速度	1	教师应简略地介绍有关角位移、角速度和角加速度的概念，学生亦应懂得以下三个有关线性量和角量的关系 $s = r\theta$ $\dot{s} = r\dot{\theta}$ （或 $v = r\omega$） 及 $\ddot{s} = r\ddot{\theta}$ （或 $a = r\alpha$）  角运动的向量表达法可以右图说明。学生应知道利用右手法则确定旋转的正方向。只要转动是局限在单一平面上，转动向量 $\vec{\theta}$、$\vec{\omega}$ 及 $\vec{\alpha}$ 将会互相平行而可以当作标量处理，因为代数的正负号已足够说明向量的方向。 *例* 一圆盘以加速度 $\ddot{\theta} = 2t$ 沿着轴心转动。若初始条件为θ = 0 弧度，θ' = 0 弧度 / 秒，求时间 t = 3s 秒时的角速度和角位移。 学生可以在此例中利用积分法得出结果。
3.3 合速度	3	这里强调的是如何求得质点的合速度。教师应提醒学生可利用三角形（或多边形）定律或分量法去求合速度。一些如划船横渡河流和雨点在气流中落下等问题可作讨论。在这些情况中，学生应利用向量图去求合速度。速度并不互相垂直的情况也应讨论。以下是一例子。

内 容	时间分配	教 学 建 议
		例 一艘货船离阅港口，向着 N50°E 的方向进发，其在静水中的速度为 25 kmh^{-1}，但水流则以 4.5 kmh^{-1} 的速度向东流，求货船的合速度。 在上例中，学生除了可以把速度沿东和西方向分解求合速度外，还可以利用正弦和余弦定律去求合速度。
3.4 相对运动	8	教师应替学生复习有关位置向量的概念。而相对运动的概念可以利用向量的方法引入，如图所示，*A* 相对 *B* 的位置向量是 $\vec{r}_{AB} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$ 因此 $\dot{\vec{r}}_{AB} = \dot{\vec{r}}_A - \dot{\vec{r}}_B$ 即 A 相对 B 的速度是 $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$  要介绍 A 相对于 B 的速度，较易的方法可在 A 和 B 上加上速度 $-\vec{v}_B$ “使 B 静止”，即能得到 A 相对于 B 的速度是 $\vec{v}_A - \vec{v}_B$。相对速度的问题可以利用三角学和向量的知识去解决。其中有关拦截和两物体最短距离的问题是典型的例子。 *例一* A 船以速度 50 kmh^{-1} 向南移动。从 A 船观察，B 船似以速度 75 kmh^{-1} 向西南方向移动，求 B 船的速度。 在上例，教师可引导学生画出三角形的向量图，然后用正弦和余弦定律求 B 的速度。 *例二* 在中午，S 船在原点以速度 $10\vec{j}$ 出发。同时，另一艘船 S_2 以位置向量为 $\vec{r} = -10\vec{i} - 10\vec{j}$ 和速度向量为 $20\vec{i} + 25\vec{j}$ 出发。 在上例中，教师可引导学生写下在时间 t 时一船相对另一船的向量方程，然后两船的最近位置向量和最接近的距离亦可加以讨论。

内容	时间分配	教学建议
		例三 一颗人造卫星以恒速率 u kmh^{-1} 沿西北方向的路径与水平成倾角 θ下坠。一艘朝西以恒速率 v kmh^{-1} 行驶的船从点 0 观察得卫星离船的水平距离为 d km，高度为 h km 而方向为西北方。 (a) 相对于 0 点，求 (i) 人造卫星的位置向量； (ii) 人造卫星的速度 的表达式。 (b) 求船和人造卫星之间的最短距离。 这个例子可以帮助学生综合有关向量和相对速度所学到的知识。 最后教师可以向学生提出，要为 A 相对 B 的加速度下定义，学生可用与相对速度相类似的方法而做，即 $\overrightarrow{a_{AB}}=\overrightarrow{a_A}-\overrightarrow{a_B}$。
3.5 速度和加速度的沿径向量及垂直径向量分解	4	考虑质点在平面上的运动，教师可以利用极坐标引入速度和加速度的径向和横向分量。 

内容	时间分配	教学建议
		设 P 是质点在时间 t 时的位置，APB 是质点的路径和 P 的极坐标是 (r, θ). 因此 $\overrightarrow{OP}=\vec{r}=r\hat{e}$ 而 $\hat{e}_r$ 和 $\hat{e}_\theta$ 是平行于和垂直于 $\vec{r}$ 的单位向量。 在以上 1.11 节学生已学会 $\dot{\hat{e}}_r=\dot{\theta}\hat{e}_\theta$ 和 $\dot{\hat{e}}_\theta=-\dot{\theta}\hat{e}_r$。对它们直接微分，学生不难得到以下结果： $\dot{\vec{r}}=\dot{r}\hat{e}_r+r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$ 和 $\ddot{\vec{r}}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})\hat{e}_\theta$ 表列以上结果有助学生认识清楚表达式。 | | 径分量 | 横分量 | | 速度 | $\dot{r}$ | $r\dot{\theta}$ | | 加速度 | $\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$ | $r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}$ 或 $\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})$ | *例一* 一单位质量的质点在平面上移动，其极坐标为 $r(t)=1+t$ $\theta(t)=\frac{\pi}{1+t}$ 而 $t\geq 0$ 在时间 $t=1$ 时，求质点的速度和加速度的径向和横向分量。

内 容	时 间 分 配	教 学 建 议
	12	*例二* 质点 P 以圆心 O 和半径 a 绕着圈圈运行如图示。某位置向量在时间 t 时为 $\vec{r}=a\hat{e}_r$ 其中 $\hat{e}_r=\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}$ 若 $\hat{e}_\theta=-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j}$ 求证 $\dot{\vec{r}}=a\dot{\theta}\hat{e}_\theta$ 及 $\ddot{\vec{r}}=a\ddot{\theta}\hat{e}_\theta-a\dot{\theta}^2\hat{e}_r$  虽然极坐标是很适合去解一些有关中心轨道的动力问题，但有关轨道问题的详细知识是不需要的。
	18	